УДК 330.46

Н.В. Румянцев
д-р. экон. наук, профессор
Донецкий национальный технический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕНАЛАДКОЙ В ПРОМЕЖУТКЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ЦИКЛАМИ

В работах автора [1], [2] были рассмотрены модели гибких производственных систем (ГПС), в которых предполагалось, что переналадка прибора начинается либо сразу же после поступления первого заказа в систему, либо сразу же после окончания производственного цикла при условии, что заказы, поступающие за время переналадки, теряются. Использование таких схем переналадки оборудования на практике связано с определенными техническими сложностями, такими как, например, практического определения момента начала переналадки. Для решения этой задачи можно определять функцию распределения продолжительности производственного цикла, затем его математическое ожидание и дисперсию. Используя эти числовые характеристики можно, более или менее точно определить момент начала переналадки. В противном случае предприятие должно организовать работу ГПС таким образом, что у него постоянно на складе должно находиться оборудование, предназначенное для переналадки, и бригада, выполняющая данную переналадку.

Рассмотрим модель организации переналадки, при которой последняя начинается через определенное случайное время после окончания производственного цикла. Заказы, поступающие в систему или на ГПС за время задержки до начала переналадки и за время переналадки, теряются. Отметим, что задержка начала переналадки обусловлена тем, что предприятию необходимо поставить новое оборудование для продолжения технологического процесса. В данном случае происходит экономия средств за счет того, что ремонтная бригада, выполняющая работу по установке нового оборудования, может быть передана на аутсорсинг.

Постановка задачи. Моделирование гибкой производственной системы будем осуществлять в рамках теории массового обслуживания. Итак, предположим, что некоторое предприятие интерпретируется в виде одноканальной системы массового обслуживания, на вход которой поступает пуассоновский поток интенсивности $\lambda > 0$ заказов в единицу времени. Обработка заказов происходит в порядке их поступления, причем время обработки заказов имеет показательный закон распределения с параметром $\mu > 0$. Прибор обладает особенностью, состоящей в том, что после окончания обработки всех заказов, находящихся в системе, он переходит в свободное состояние, которое будем называть свободным неготовым к работе состоянием. Через случайное время, имеющее показательное распределение, с параметром $\theta > 0$, прибор начинает переналадку, длительность которой также имеет показательный закон распределения с параметром $\nu > 0$. Требования, поступающие в систему, как за время ожидания начала переналадки, так и за время переналадки, теряются.

Случайный процесс $\xi(t)$, описывающий поведение системы, может находиться в следующих состояниях:

0 – прибор свободен и ожидает переналадки (свободен-неготов);

0* – прибор проводит переналадку и в системе нет заказов;

$(1, 0)$ – прибор свободен и готов к обслуживанию требований (свободен-готов);

$(1, k)$ – прибор обслуживает требование и в системе находится k заказов $(k \geq 1)$.

Граф состояний системы имеет вид:

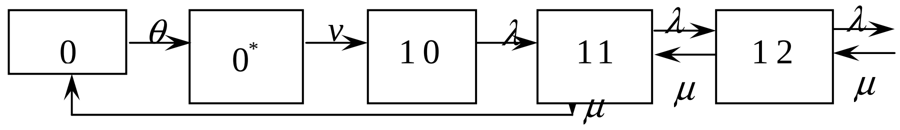

Рис. 1. Граф состояний системы с задержкой переналадки прибора и потерей заказов

Обозначим стационарные вероятности случайного процесса $\xi(t)$ через $P_0 = \mathbb{P}\{\xi(t)=0\}$, $P_{0^*} = \mathbb{P}\{\xi(t)=0^*\}$, $P_{1k} = \mathbb{P}\{\xi(t)=(1,k)\}$, $k = 0,1,2...$

Тогда система уравнений для определения стационарных вероятностей состояний системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} -\theta P_0 + \mu P_{11} = 0 \\ -\nu P_{0^*} + \theta P_0 = 0 \\ -\lambda P_{10} + \nu P_{0^*} = 0 \\ -(\lambda+\mu)P_{11} + \lambda P_{10} + \mu P_{12} = 0 \\ -(\lambda+\mu)P_{1k} + \lambda P_{1k-1} + \mu P_{1k+1} = 0, \quad k \ge 2. \end{cases} \tag{1}$$

Для решения системы (1) введем производящую функцию $a(z) = \sum_{k\ge1} P_{1k} z^k$. Тогда, после умножения уравнений системы (1), начиная с четвертого, на z в соответствующих степенях суммирования, получаем, что имеет место соотношение вида:

$$\left(\rho z^2 - z(1+\rho) + 1\right) a(z) = zP_{11} - \rho z^2 P_{10}, \tag{2}$$

где $\rho = \lambda/\mu$.

А из первых трех уравнений системы (1) получаем, что:

$$P_{10} = \frac{\beta}{\rho} P_0, \tag{3}$$

$$P_{11} = \beta P_0, \tag{4}$$

$$P_{0^*} = \frac{\beta}{\delta} P_0, \tag{5}$$

где $\delta = \dfrac{\nu}{\mu}$, $\beta = \dfrac{\theta}{\mu}$.

С учетом выражений (3) и (4) получаем, что соотношение (2) принимает вид:

$$a(z) = \frac{\beta z P_0}{1-\rho z} = \left[1 + \rho z + (\rho z)^2 + ...\right] \beta z P_0, \tag{6}$$

где $\rho < 1$.

Из (6) получаем, что

$$P_{1k} = \beta \rho^{k-1} P_0, \quad k \ge 1. \tag{7}$$

Вероятность P_0 найдем из условия нормировки, имеющей вид:

$$P_0 + P_{0^*} + P_{10} + a(1) = 1. \tag{8}$$

В силу того, что

$$a(1)=\frac{\beta P_0}{1-\rho} \tag{9}$$

условие нормировки (8) принимает вид

$$P_0+\frac{\beta}{\delta}P_0+\frac{\beta}{\rho}P_0+\frac{\beta P_0}{1-\rho}=1,$$

из которого вытекает, что

$$P_0=\frac{\rho\delta(1-\rho)}{\beta\delta+\rho(1-\rho)(\beta+\delta)}. \tag{10}$$

Итак, нами найдены вероятности состояний описанной выше гибкой производственной системы.

При построении экономического показателя, характеризующего затраты на обеспечение переналадки оборудования необходимо использовать экономическую интерпретацию найденных числовых характеристик, а именно:

а) вероятность P_0 можно интерпретировать как долю времени, в течение которого прибор ожидает начала переналадки, т.е. если ГПС функционирует в течение времени t, то $P_0\cdot t$ – время, в течение которого ГПС свободна и неготова к работе;

б) вероятность P_{0^*} – это доля времени, в течение которого ГПС находится в процессе переналадки;

в) $P_0+P_{0^*}=\dfrac{\delta+\beta}{\delta}P_0$ – это вероятность того, что заявка, поступающая в систему, получает отказ;

г) выражение $a(1)$ можно интерпретировать как вероятность того, что гибкая производственная система занята обработкой заказов;

д) очень часто в качестве характеристики, позволяющей оценить работу ГПС, берется средняя длина очереди. Важность этой характеристики объясняется тем, что она связана с временем ожидания клиентом начала выполнения заказа. Средняя длина очереди в нашей системе равна

$$\bar{q}=\frac{\beta P_0}{(1-\rho)^2}. \tag{11}$$

Замечание. В заключение отметим, что необходимым условием существования стационарного распределения вероятностей процесса $\xi(t)$ является условие $0<\rho<1, \quad \delta>0.$

Учитывая тот факт, что зачастую гибкая производственная система обслуживает нетерпеливых клиентов, то целесообразно рассмотреть ситуацию, при которой клиенты могут покидать систему не дождавшись начала своего обслуживания.

Итак, рассмотрим систему массового обслуживания, описанную выше и предположим, что клиенты могут покидать систему необслуженными, т.е. заказ на выполнение работы может находиться ограниченное время, имеющее показательный закон распределения с параметром $\psi>0$. Случайный процесс $\xi_1(t)$, описывающий поведение системы имеет те же состояния, что и процесс $\xi(t)$, однако граф состояний процесса $\xi_1(t)$ имеет вид

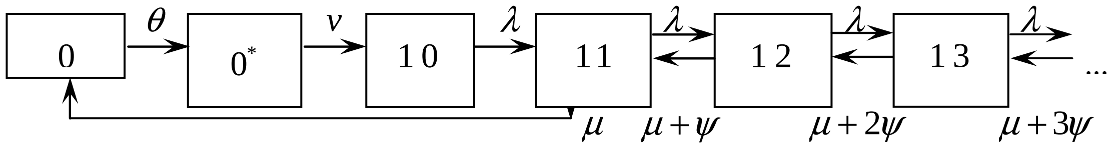

Рис. 2. Граф состояний системы с нетерпеливыми клиентами и переналадкой

Для определения стационарных вероятностей состояний данной системы имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -\theta P_0 + \mu P_{11} = 0, \\ -\nu P_{0^*} + \theta P_0 = 0, \\ -\lambda P_{10} + \nu P_{0^*} = 0, \\ -(\lambda + \mu) P_{11} + \lambda P_{10} + (\mu + \psi) P_{12} = 0, \\ -(\lambda + \mu + \psi) P_{12} + \lambda P_{11} + (\mu + 2\psi) P_{13} = 0, \\ -(\lambda + \mu + (k-1)\psi) P_{1k} + \lambda P_{1k-1} + (\mu + k\psi) P_{1k+1} = 0, \quad k \geq 2. \end{cases} \tag{12}$$

Для решения системы (12) воспользуемся тем фактом, что начиная с состояния (1,1) процесс $\xi_1(t)$ является процессом гибели и размножения, а поэтому для определения вероятностей состояний можно воспользоваться известными для процесса гибели и размножения результатами. Имеем: $P_{11} = \beta P_0$. Тогда

$$P_{12} = \frac{\lambda}{\mu + \psi} P_{11} = \frac{\rho \beta P_0}{1 + \gamma},$$

где $\gamma = \dfrac{\psi}{\mu}$;

$$P_{13} = \frac{\lambda P_{12}}{\lambda + 2\psi} = \frac{\beta \rho^2 P_0}{(1+\gamma)(1+2\gamma)}$$

и т.д.

$$P_{1k} = \frac{\beta \rho^{k-1} P_0}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 + i\gamma)}. \tag{13}$$

Вычисление вероятности P_0 из условия нормировки приводит к достаточно громоздким вычислениям, однако оно аналогично вычислениям, проведенным выше.

Знание вероятностей состояний системы позволит, по уже проведенной схеме, определить все характеристики, необходимые для принятия решений о целесообразности аутсорсинга в данной модели организации работы ГПС.

Вывод: Таким образом, найденные характеристики ГПС позволяют рассчитать экономические показатели эффективности функционирования рассматриваемой экономической системы. Сравнивая затраты, которые понесет предприятие за счет ожидания начала переналадки некоторое случайное время (работники, выполняющие переналадку, могут перейти на аутсорсинг), с затратами, которые будет нести предприятие в случае когда ремонтная бригада, выполняющая работу по установке нового оборудования, будет постоянно находиться на данном предприятии можно, в зависимости от интенсивности спроса, выбрать оптимальный вариант.

Литература

1. Румянцев Н.В. Гибкие логистические системы с переналадкой в начале периода занятости и потерей требований / Н.В.Румянцев // - Науковий журнал «Бізнес Інформ», № 4, 2012. - Харків: ФОП Александрова К.М.; ВД «ИНЖЕК», 2012. – С. 25-27.
2. Румянцев Н.В. Гибкие логистические системы с переналадкой в конце периода занятости и потерей требований / Н.В.Румянцев// - Науковий журнал «Бізнес Інформ», № 5, 2012. - Харків: ФОП Александрова К.М.; ВД «ИНЖЕК», 2012. – С. 51-54.
3. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко.– М.: Наука, 1987. – 336 с.

1. Rumiancev N.V., 2012. Flexible logistics system with changeover at the beginning of the period of employment and loss requirements. Scientific journal "Business Inform". Vol. 4, 2012. pp. 25-27.
2. Rumiancev N.V., 2012. Flexible logistics system with changeover at the finish of the period of employment and loss requirements. Scientific journal "Business Inform". Vol. 5, 2012. pp. 51-54.
3. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N., 1987. *Introduction to queuing theory.* Moscow, Nauka. 336p.